SESSION 1985

MATHÉMATIQUES

Options T et TA

Épreuve n° 2 (problème)

Durée : 3 heures

La partie I est indépendante des suivantes.

Les parties III, IV et V sont indépendantes entre elles mais utilisent des résultats de la partie II.

I

Soit l'équation différentielle :

$$(1) \qquad (1 - x^2)y'' - 3xy' + 15y = 0$$

1°) On cherche une solution polynomiale de degré n de (1).
Montrer qu'on a nécessairement $n = 3$.

2°) Déterminer un polynôme Q, solution de (1) tel que $Q'(0) = -4$.

3°) On suppose dans cette question $|x| < 1$ et on fait le changement de variable défini par :

$$t = \operatorname{Arccos} x \quad \text{et} \quad y(x) = \frac{z(t)}{\sin t}$$

Ecrire l'équation différentielle transformée de (1) par ce changement de variable.

En déduire les solutions de (1) sur $]-1, 1[$

II

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, soit f_n l'application de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$

$$(2) \qquad f_n : t \longmapsto \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$$

1°) Déterminer les limites : $\lim_{t \to 0} f_n(t)$, $\lim_{t \to \pi} f_n(t)$.

On prolonge désormais f_n à $[0, \pi]$ par continuité.

2°) Pour $t \in [0, \pi]$ établir une relation de récurrence entre

$$f_{n+1}(t),\ f_n(t) \quad \text{et} \quad f_{n-1}(t)$$

pour $n \geqslant 1$.

3°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme U_n de degré n tel que pour tout $t \in [0, \pi]$ on ait :

$$(3) \qquad f_n(t) = U_n(\cos t)$$

Etablir une relation de récurrence entre U_{n+1}, U_n et U_{n-1} pour $n \geqslant 1$.

4°) Déterminer les zéros de U_n pour $n \geqslant 1$.

III

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on définit la matrice carrée d'ordre n, M_n, de terme général m_{ij} (le premier indice désignant la ligne, le second, la colonne) défini par les relations :

$$m_{ii} = 2 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$m_{i,i-1} = m_{i-1,i} = -1 \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant n,$$

$$m_{ij} = 0 \quad \text{dans les autres cas.}$$

On note P_n le polynôme caractéristique de M_n et on pose $P_0 = 1$.

1°) Expliciter M_n et P_n pour $1 \leqslant n \leqslant 3$. Déterminer dans ces mêmes cas les valeurs propres de M_n.

2°) Etablir une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1} pour $n \geqslant 1$.

3°) On pose, pour $t \in [0, \pi]$, $g_n(t) = P_n(2 - 2 \cos t)$

Comparer g_n et f_n.

4°) Déduire de ce qui précède les valeurs propres de M_n pour $n \geqslant 1$.

IV

k étant un entier $\geqslant 0$ donné, on désigne par E l'espace vectoriel des polynômes d'une variable à coefficients réels de degré au plus égal à k et on définit l'application de ExE dans $\mathbb{R}$.

$$(P, Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\ P(x)\ Q(x)\ dx.$$

1°) Montrer qu'on définit ainsi une structure d'espace euclidien sur E.

2°) Pour tout couple (p, q) d'entiers, $0 \leqslant p \leqslant k$, $0 \leqslant q \leqslant k$, calculer

$$\langle U_p, U_q \rangle$$

Conclure.

V

Soit L l'application :

$$P \longmapsto L(P) = (1 - x^2)\ P'' - 3\ x\ P'$$

1°) E étant l'espace vectoriel défini dans la partie IV, montrer que L est un endomorphisme de E.

2°) En remarquant que la fonction $y : t \longmapsto \sin (n+1)t$ est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + (n+1)^2\ y = 0$$

déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de L.